

1 – Introdução e Base Matemática

Introdução	2
Base Matemática	3
1.1 – O número imaginário	3
1.2 – Números complexos	4
1.3 – Operações com números complexos	9
1.4 – O seno e o co-seno	12
1.5 – A equação de Euler	15
1.6 – A tangente	17
1.7 – As inversas de seno, co-seno e tangente	19
1.8 – Exponenciais e logaritmos	22
1.9 – Derivadas	23
1.10 – Integrais	30
1.11 – Decibéis (dB)	38

Introdução

Quando se fala em *sinais* geralmente é associado à medição ou ao registo de algum fenómeno físico ou, em outras palavras, de um *sistema*. Portanto, *sinais* e *sistemas* são conceitos bastante interligados.

No presente capítulo 1 faremos uma breve revisão de diversos tópicos básicos da matemática que serão úteis para os capítulos seguintes. Recapitularemos vários resultados, expressões e fórmulas da álgebra, da álgebra linear, da análise, do cálculo diferencial e integral e da trigonometria que serão de certa forma usado neste texto.

Nos capítulos 2 e 3 trataremos da descrição e da terminologia dos *sinais* enquanto que no capítulo 4 trataremos de *sistemas*.

Nos demais capítulos trataremos de algumas ferramentas de *análise de sinais*: Transformadas de Laplace (capítulo 5), Transformadas z (capítulo 6), Séries e Transformadas de Fourier (capítulos 7 e 8, respectivamente) e Diagramas de Bode (capítulo 9).

Base Matemática

1.1 – O número imaginário

O número imaginário “j” é definido como:

$$j = \sqrt{-1}.$$

Na literatura de matemática é muito comum usar-se “i” (de “*imaginário*”) para o número imaginário:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Entretanto, em engenharia a letra “i” é normalmente reservada para a corrente eléctrica (medida em Ampères) enquanto que para o número imaginário usa-se a letra “j”.

Logo,

$$j^2 = -1 \qquad j^3 = -\sqrt{-1} \qquad j^4 = 1$$

Portanto,

$$j^5 = j^4 \cdot j^1 = j = \sqrt{-1}$$

$$j^6 = j^4 \cdot j^2 = j^2 = -1$$

$$j^7 = j^4 \cdot j^3 = j^3 = -\sqrt{-1}$$

$$j^8 = j^4 \cdot j^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

e assim por diante.

Além disso:

$$j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{j}{j \cdot j} = \frac{j}{(-1)} = -j$$

ou seja,

$$\boxed{j^{-1} = -j.}$$

Semelhantemente,

$$j^{-2} = 1$$

$$j^{-3} = j$$

$$j^{-4} = -1$$

Alguns exemplos imediatos deste resultado

$$\boxed{\frac{1}{j} = -j.}$$

$$\frac{2}{j} = -2j$$

$$\frac{-3}{j^3} = -3j$$

$$\frac{1}{(2j)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{-5}{j^4} = -5$$

1.2 – Números complexos

Um número complexo $z \in \mathbb{C}$ é expresso por:

$$z = \alpha + \beta j$$

onde α e $\beta \in \mathcal{R}$ (números reais) e j é o número imaginário puro conforme definido acima.

α e β são chamados de:

α = parte real de z , e

β = parte imaginária de z

e são representados por

$$\alpha = \operatorname{Re}(z)$$

$$\beta = \operatorname{Im}(z).$$

Um número complexo $z \in \mathbb{C}$ escrito na forma acima é dito estar na forma “*cartesiana*” ou “*algébrica*”.

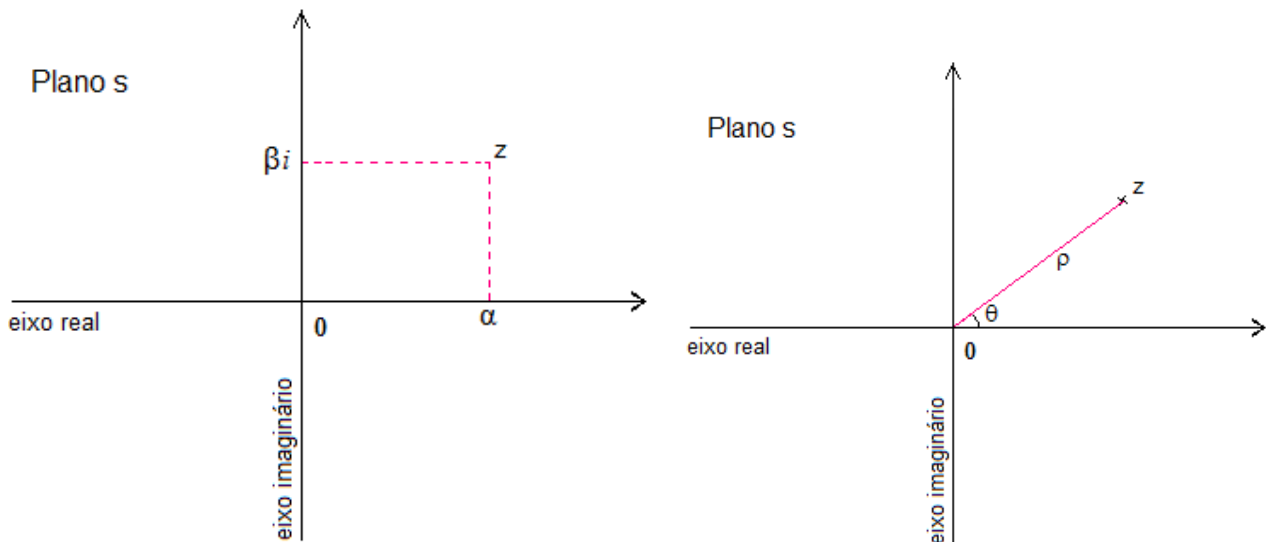


Fig. 1.1 – O *plano s*, a representação cartesiana (à esquerda) e a representação polar (à direita).

Um número complexo $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito de forma equivalente como

$$z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

onde ρ e θ são números reais, sendo que $\rho > 0$ e θ (em *radianos*) é um arco.

A expressão acima é muito comumente abreviada (especialmente em textos de engenharia) para

$$z = \rho \cdot \angle \theta.$$

por uma questão de simplicidade. Além disso, neste caso, quando se usa esta notação para z , é comum se denotar o ângulo θ em *graus* em vez de *radianos*.

ρ e θ são chamados de:

$\rho =$ *módulo* de z , e

$\theta =$ *ângulo* ou *fase* de z

e são representados por

$$\rho = |z|$$

$$\theta = \angle z.$$

Um número complexo z escrito nesta forma acima é dito estar na forma “*polar*” ou “*trigonométrica*”.

A representação gráfica de um número complexo $z \in \mathbb{C}$ feita no plano complexo (ou *plano s*) em termos de α , β , ρ e θ é dada nas figuras 1.1 e 1.2.

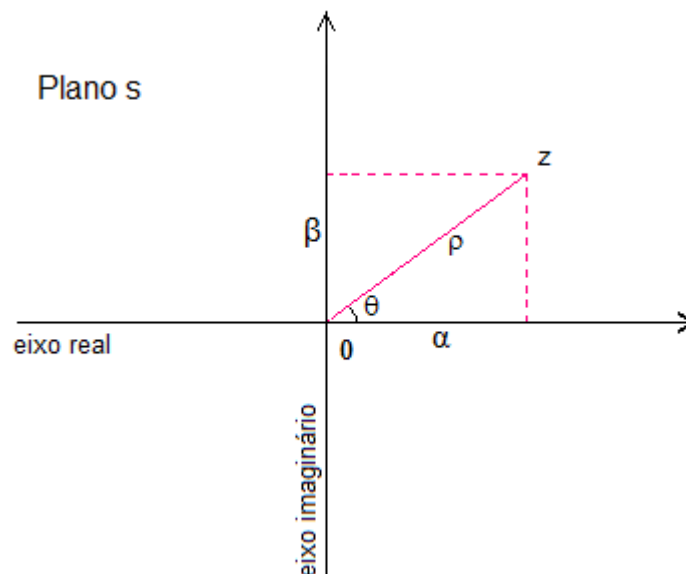


Fig. 1.2 – O *plano s*, as coordenadas cartesianas e polares

A transformação da forma cartesiana para polar assim como da forma polar para cartesiana são facilmente obtidas pelas relações básicas da geometria (teorema de Pitágoras) e da trigonometria (senos e co-senos).

As relações que permitem transformar da forma cartesiana para a forma polar são:

$$\rho = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\theta = \angle z = \arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

e as relações que permitem transformar da forma polar para a forma cartesiana são:

$$\alpha = \operatorname{Re}(z) = \rho \cdot \cos \theta$$

$$\beta = \operatorname{Im}(z) = \rho \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Alguns exemplos:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \angle 210^\circ \\ &= 2 \cdot \angle -150^\circ \\ &= 2 \cdot e^{-j2,618} \\ &= -1,732 - 1j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 - 2j \\ &= 2\sqrt{2} \angle -45^\circ \\ &= 2\sqrt{2} \angle 315^\circ \\ &= 2\sqrt{2} \cdot e^{-j(\pi/4)} \\ &= 2,8284 \cdot e^{-j(0,7854)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 1 \cdot \angle 45^\circ \\ &= e^{j0,785} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j \\ &= 0,707 + 0,707j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= j \\ &= 0 + 1j \\ &= 1 \angle 90^\circ \\ &= e^{j(\pi/2)} \\ &= e^{j(1,57)} \end{aligned}$$

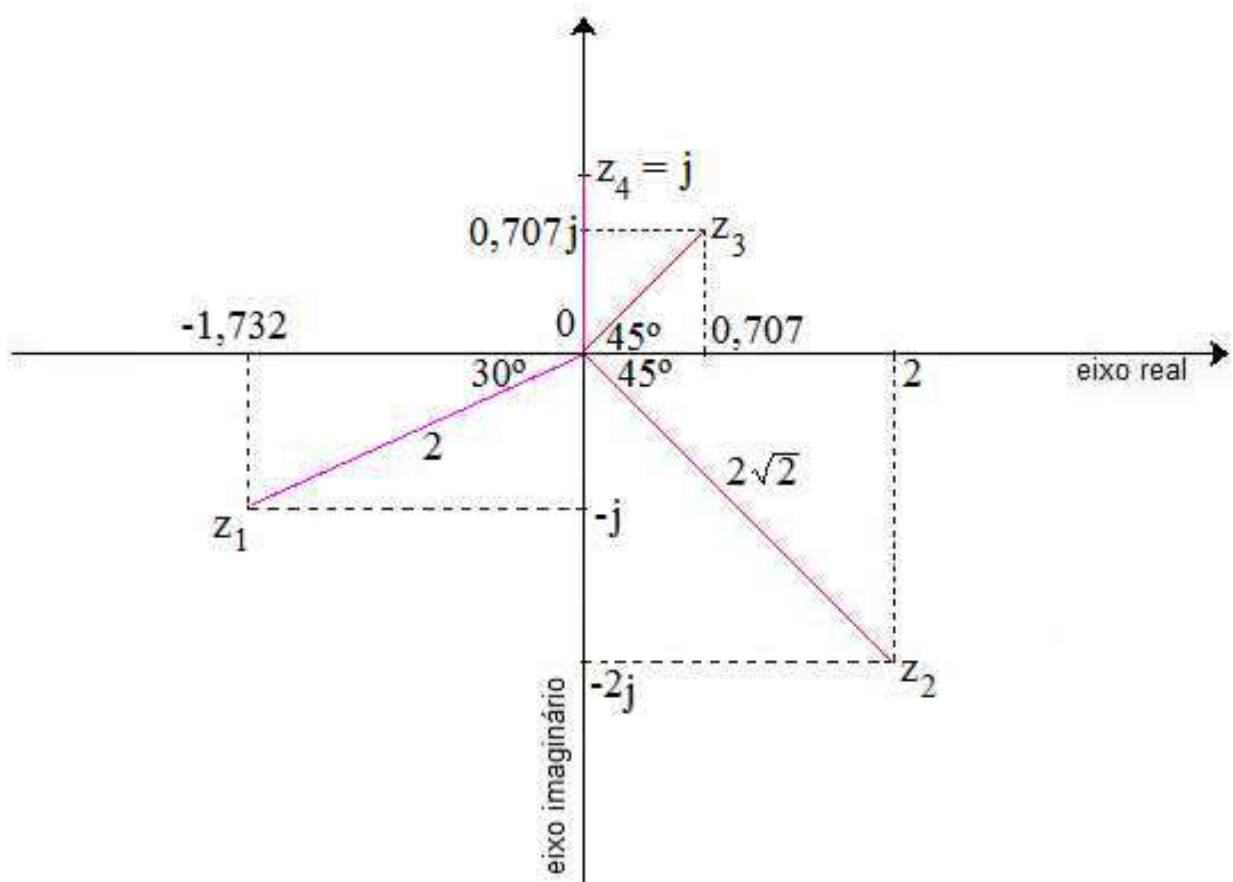


Fig. 1.3 – A representação gráfica dos números complexos z_1 , z_2 , z_3 e z_4 .

O conjugado de um número complexo $z \in \mathbb{C}$

$$z = \alpha + \beta j$$

é o número complexo \bar{z} ou z^*

$$\bar{z} = z^* = \alpha - \beta j$$

ou seja, \bar{z} ou z^* é o rebatimento do ponto z no plano s em relação ao eixo real.

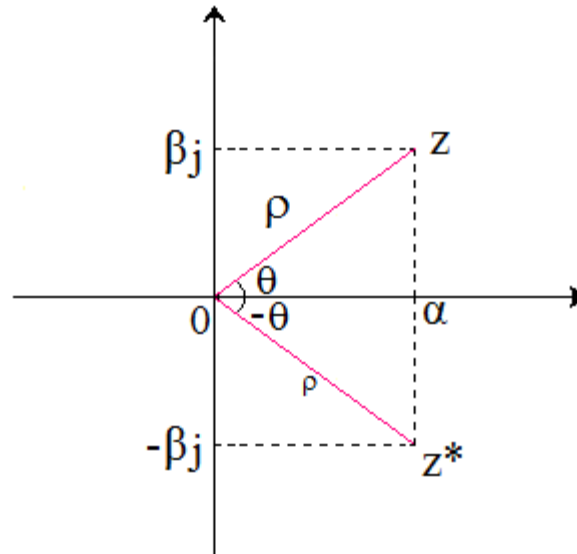


Fig. 1.4 – O conjugado \bar{z} ou z^* de um número complexo z .

Em termos da forma polar o conjugado \bar{z} ou z^* de um número complexo:

$$z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

é dado por:

$$\bar{z} = z^* = \rho \cdot e^{-j\theta}$$

Note que

$$\overline{\bar{z}} = (z^*)^* = z$$

e, além disso, se x é um número real ($x \in \mathbb{R}$), ou seja, x é um número complexo com a parte imaginária igual a zero, então:

$$\overline{\bar{x}} = (x^*)^* = x$$

1.3 – Operações com números complexos

A forma cartesiana é mais apropriada para operações de *soma* ($z_1 + z_2$) e *subtração* ($z_1 - z_2$) de números complexos,

$$(\alpha_1 + \beta_1 \cdot j) + (\alpha_2 + \beta_2 \cdot j) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \cdot j$$

$$(\alpha_1 + \beta_1 \cdot j) - (\alpha_2 + \beta_2 \cdot j) = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) \cdot j$$

enquanto que a forma polar é mais apropriada para operações de *multiplicação* ($z_1 \cdot z_2$) e *divisão* (z_1 / z_2) de números complexos:

$$(\rho_1 \cdot e^{j\theta_1}) \cdot (\rho_2 \cdot e^{j\theta_2}) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{(\rho_1 \cdot e^{j\theta_1})}{(\rho_2 \cdot e^{j\theta_2})} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

ou, equivalentemente:

$$(\rho_1 \cdot e^{j\theta_1}) \cdot (\rho_2 \cdot e^{j\theta_2}) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \angle(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{(\rho_1 \cdot e^{j\theta_1})}{(\rho_2 \cdot e^{j\theta_2})} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Um resultado bastante útil é dado pela equação abaixo:

$$\boxed{(\alpha + \beta j) \cdot (\alpha - \beta j) = \alpha^2 + \beta^2}$$

ou seja, o produto $Z \cdot \bar{Z}$ de um número complexo z pelo seu conjugado \bar{z} é um número real (um número complexo sem a parte imaginária) e cujo valor é a soma do quadrado da parte real de z com o quadrado da parte imaginária de z .

Este resultado permite que se escreva uma fracção z/z' , onde z e z' são 2 números complexos

$$z = \alpha + j \cdot \beta \quad \text{e} \quad z' = \sigma + j \cdot \omega$$

na forma cartesiana $A + j \cdot B$, ou seja,

$$\frac{z}{z'} = \frac{\alpha + j\beta}{\sigma + j\omega} = A + j \cdot B$$

Note que, multiplicando-se ambos o numerador e o denominador de z/z' pelo conjugado do denominador $\overline{z'}$ temos

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{(\alpha + j\beta)(\sigma - j\omega)}{(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)} = \frac{(\alpha\sigma + \beta\omega) + j \cdot (\beta\sigma - \alpha\omega)}{\sigma^2 + \omega^2}$$

ou seja,

$$\frac{z}{z'} = \frac{(\alpha\sigma + \beta\omega)}{(\sigma^2 + \omega^2)} + j \cdot \frac{(\beta\sigma - \alpha\omega)}{(\sigma^2 + \omega^2)}$$

e portanto,

$$A = \frac{(\alpha\sigma + \beta\omega)}{(\sigma^2 + \omega^2)} \quad \text{e} \quad B = \frac{(\beta\sigma - \alpha\omega)}{(\sigma^2 + \omega^2)}$$

Alguns exemplos:

$$\text{a) } \frac{z}{z'} = \frac{2 - j5}{-1 + j2}$$

então, $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\sigma = -1$, e $\omega = 2$, logo

$$\frac{z}{z'} = \frac{(-2 - 10)}{5} + j \cdot \frac{(5 - 4)}{5} = -2,4 + j \cdot 0,2$$

$$\text{b) } \frac{z}{z'} = \frac{3 - 2j}{1 + j}$$

então, $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\sigma = 1$, e $\omega = 1$, logo

$$\frac{z}{z'} = \frac{(3 - 2)}{2} + j \cdot \frac{(-2 - 3)}{2} = 0,5 - j \cdot 2,5$$

$$\text{c) } \frac{z}{z'} = \frac{3}{j}$$

então, $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $\sigma = 0$, e $\omega = 1$, logo

$$\frac{z}{z'} = \frac{(0 + 0)}{(j)(-j)} + j \cdot \frac{(0 - 3)}{(j)(-j)} = 0 - j \cdot 3 = -3j$$

Neste último caso observe que seria mais simples e imediato se fosse utilizado o resultado

$$\frac{1}{j} = -j$$

que já vimos mais acima.

Outro resultado bastante útil é o seguinte:

$$\boxed{|e^{j\theta}| = 1, \quad \forall \theta}$$

ou seja, $z = e^{j\theta}$ é um ponto da circunferência de raio 1 centrada na origem do plano s.

Na verdade $z = e^{j\theta}$ é o ponto desta circunferência cujo ângulo com o eixo real positivo é θ .

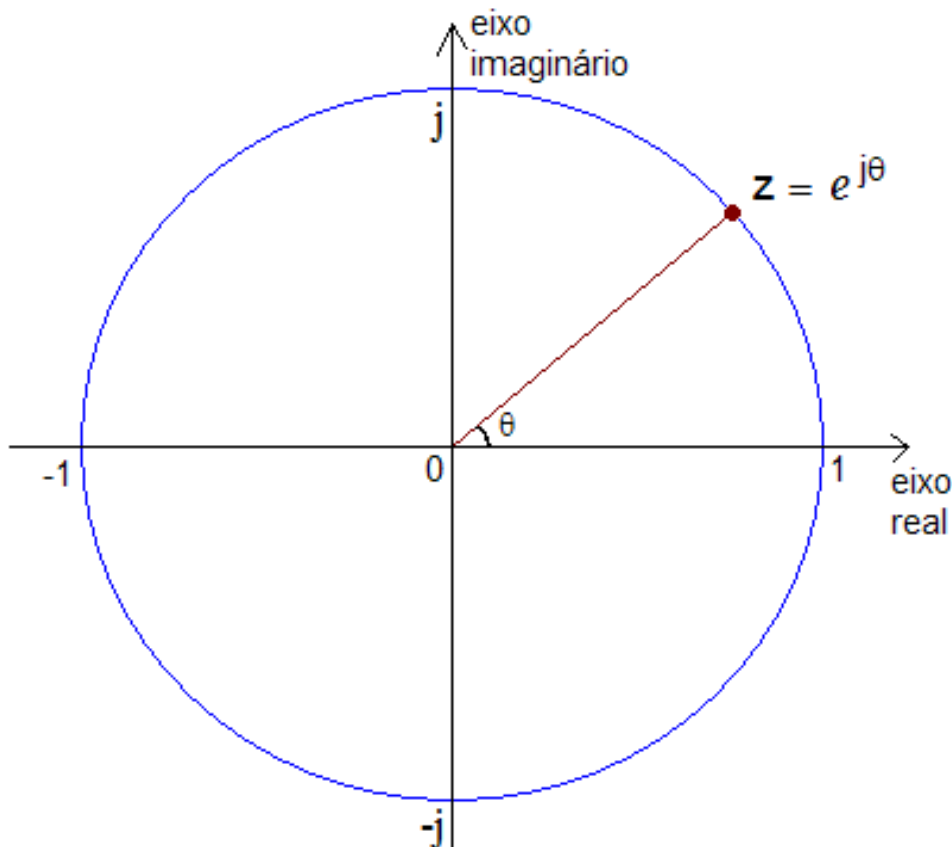


Fig. 1.5 – Circunferência de raio 1 centrada na origem do plano s.

Logo, é fácil de verificar que

$$\begin{aligned} e^{j0} &= 1 & e^{j\frac{\pi}{2}} &= j \\ e^{j\pi} &= -1 & e^{-j\frac{\pi}{2}} &= -j \end{aligned}$$

1.4 – O seno e o co-seno

O seno e o co-seno de um ângulo θ de um triângulo rectângulo são definidos como:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

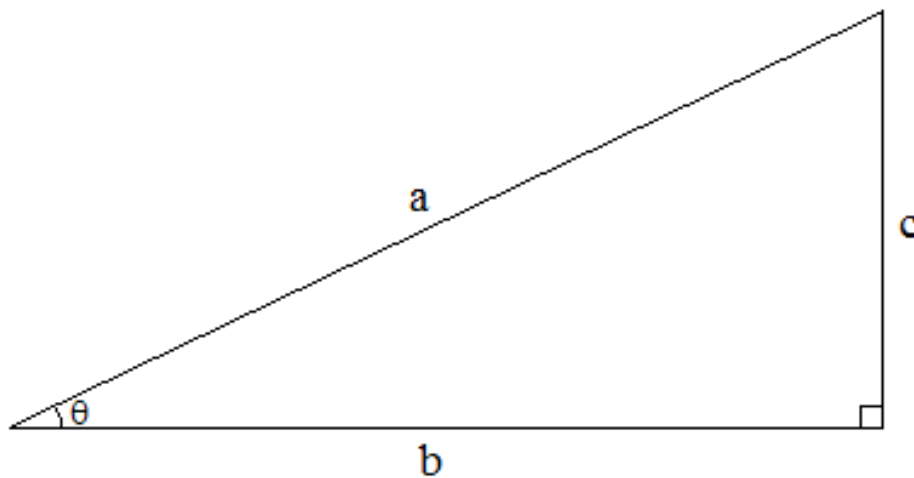


Fig. 1.6 – Triângulo rectângulo.

Usando o Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

pode-se facilmente encontrar os seguintes senos e co-senos conhecidos:

$$\text{sen}(0^\circ) = \text{sen}(0) = 0$$

$$\text{cos}(0^\circ) = \text{cos}(0) = 1$$

$$\text{sen}(45^\circ) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos}(45^\circ) = \text{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}(90^\circ) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\text{cos}(90^\circ) = \text{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Outros senos e co-senos notáveis:

$$\text{sen}(30^\circ) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos}(30^\circ) = \text{cos}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}(60^\circ) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos}(60^\circ) = \text{cos}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Se $\theta = \omega t$, onde

$$-\infty < t < \infty, \quad \text{e} \quad \omega > 0,$$

então $\text{sen}(\theta)$ e $\text{cos}(\theta)$ se transformam em funções de t ,

$$x(t) = \text{sen}(\omega t), \quad \omega > 0$$

e

$$x(t) = \text{cos}(\omega t), \quad \omega > 0$$

cujos gráficos pode-se ver abaixo nas figuras 1.7 e 1.8.

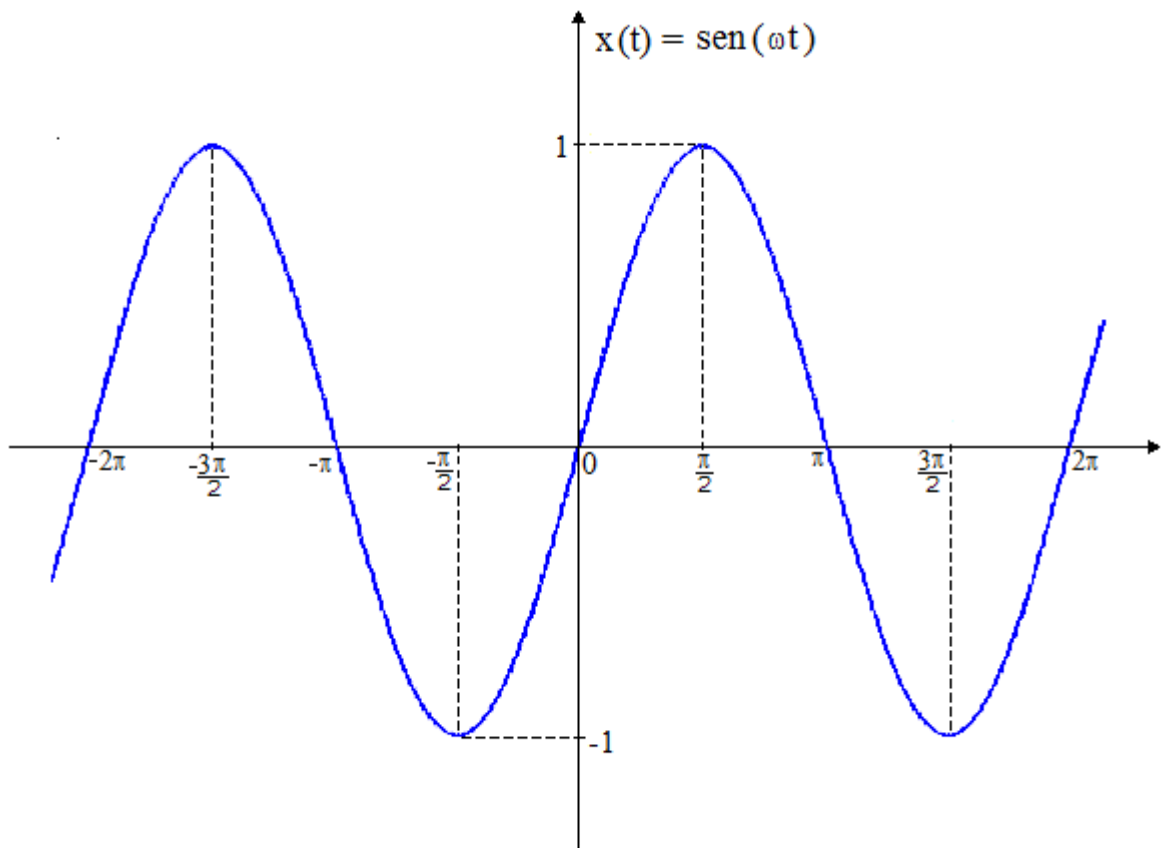


Fig. 1.7 – A função seno, $x(t) = \text{sen}(\omega t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $\omega > 0$.

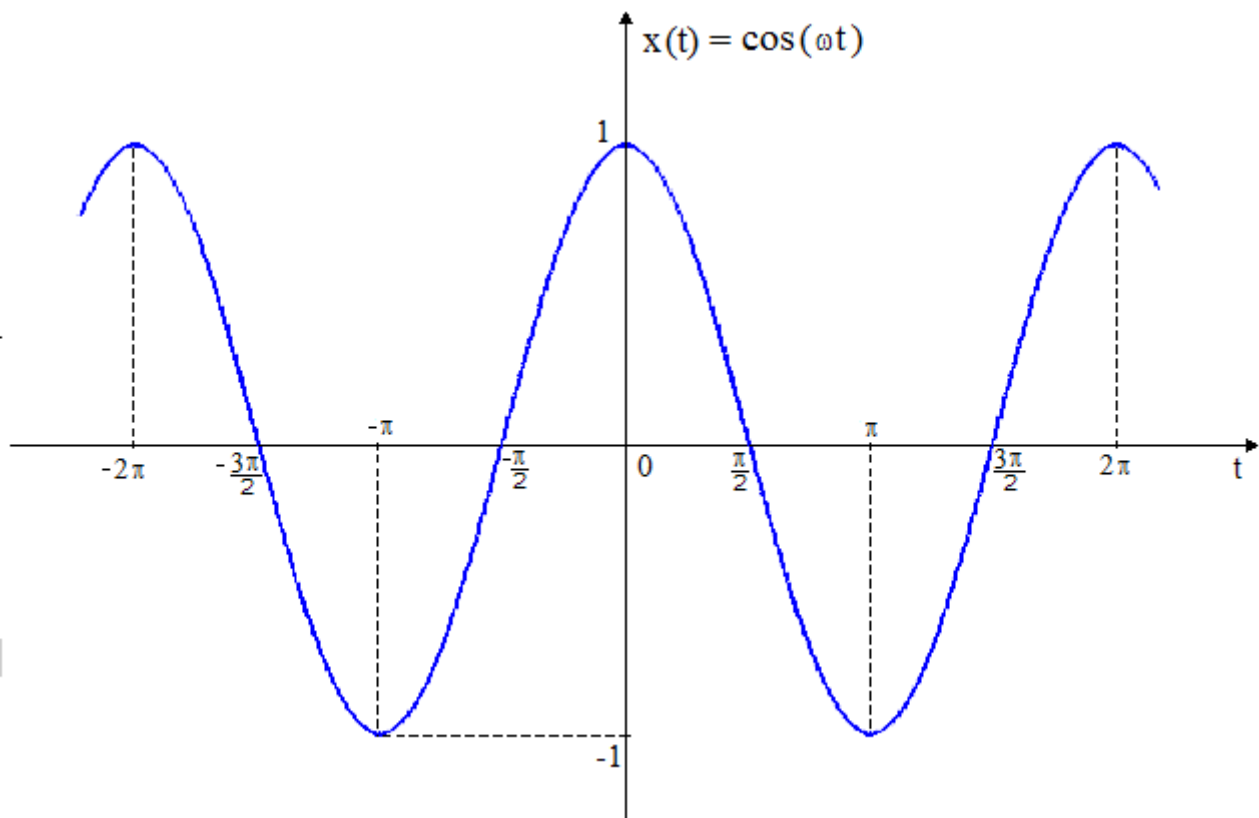


Fig. 1.8 – A função co-seno, $x(t) = \cos(\omega t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $\omega > 0$.

Algumas relações que envolvem senos e co-senos:

Versão trigonométrica do Teorema de Pitágoras:

$$\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1$$

Relações do arco complementar (para o seno e para o co-seno):

$$\text{cos}(\theta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{sen}(\theta) = \text{cos}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Relações do arco suplementar (para o seno e para o co-seno):

$$\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\pi - \theta)$$

$$\text{cos}(\theta) = -\text{cos}(\pi - \theta)$$

Relações de paridade para o seno e para o co-seno:

$$\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(-\theta)$$

$$\operatorname{cos}(\theta) = \operatorname{cos}(-\theta)$$

Seno e co-seno da soma de 2 arcos:

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{cos}(\theta_2) + \operatorname{cos}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{cos}(\theta_1)\operatorname{cos}(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)$$

Seno e co-seno do dobro de um arco:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{cos}(\theta)$$

$$\operatorname{cos}(2\theta) = \operatorname{cos}^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)$$

1.5 – A equação de Euler

O matemático e físico suíço *Leonhard Euler* (1707-1783) publicou o seguinte resultado em 1748:

$$e^{j\theta} = \operatorname{cos} \theta + j \cdot \operatorname{sen} \theta$$

e por esta razão ele é chamado de “*equação de Euler*”.

Com a equação de Euler é fácil de se compreender a transformação da forma polar para cartesiana já vista acima. Se $z \in \mathbb{C}$ escrito na forma polar,

$$\begin{aligned} z &= \rho \cdot e^{j\theta} \\ &= \rho \cdot (\operatorname{cos} \theta + j \cdot \operatorname{sen} \theta) \\ &= (\rho \cdot \operatorname{cos} \theta) + j \cdot (\rho \cdot \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

logo,

$$z = \alpha + \beta j$$

onde

$$\alpha = \rho \cdot \operatorname{cos} \theta$$

$$\beta = \rho \cdot \operatorname{sen} \theta$$

O seguinte exemplo serve para verificar as relações acima para e^{j0} , $e^{j\frac{\pi}{2}}$, $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ e $e^{j\pi}$

$$e^{j0} = \cos(0) + j \cdot \text{sen}(0) = 1 + 0 \cdot j = 1$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 \cdot j = j$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 \cdot j = -j$$

$$e^{-j\pi} = \cos(\pi) + j \cdot \text{sen}(\pi) = -1 - 0 \cdot j = -1$$

Da equação de Euler é fácil de obter-se as seguintes relações também bastante conhecidas:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Como exemplo, vamos utilizar estas relações acima obtida da equação de Euler para verificar alguns senos e co-senos bastante conhecidos:

$$\cos(0^\circ) = \cos(0) = \frac{e^{j0} + e^{-j0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\text{sen}(0^\circ) = \text{sen}(0) = \frac{e^{j0} - e^{-j0}}{2j} = \frac{1-1}{2j} = 0$$

$$\cos(90^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2} = \frac{j+(-j)}{2} = 0$$

$$\text{sen}(90^\circ) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2j} = \frac{j-(-j)}{2j} = 1$$

$$\cos(-90^\circ) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)} + e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2} = \frac{-j + j}{2} = 0$$

$$\text{sen}(-90^\circ) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)} - e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2j} = \frac{-j - j}{2j} = -1$$

$$\cos(180^\circ) = \cos(\pi) = \frac{e^{-j\pi} + e^{j\pi}}{2} = \frac{-1 + (-1)}{2} = -1$$

$$\text{sen}(180^\circ) = \text{sen}(\pi) = \frac{e^{-j\pi} - e^{j\pi}}{2j} = \frac{-1 - (-1)}{2j} = 0$$

1.6 – A tangente

A tangente de um ângulo θ de um triângulo rectângulo é definida como:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

e, pelas definições de seno e co-seno, facilmente obtém-se:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$$

e desta forma pode-se facilmente encontrar as seguintes tangentes conhecidas:

$$\text{tg}(0^\circ) = \text{tg}(0) = 0$$

$$\text{tg}(45^\circ) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{tg}(90^\circ) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

$$\text{tg}(30^\circ) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}(60^\circ) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Se $\theta = \omega t$, onde

$$-\infty < t < \infty, \quad \text{e} \quad \omega > 0,$$

então $\text{tg}(\theta)$ se transforma em uma função de t ,

$$x(t) = \text{tg}(\omega t), \quad \omega > 0$$

cujo gráfico pode-se ver abaixo na figura 1.9.

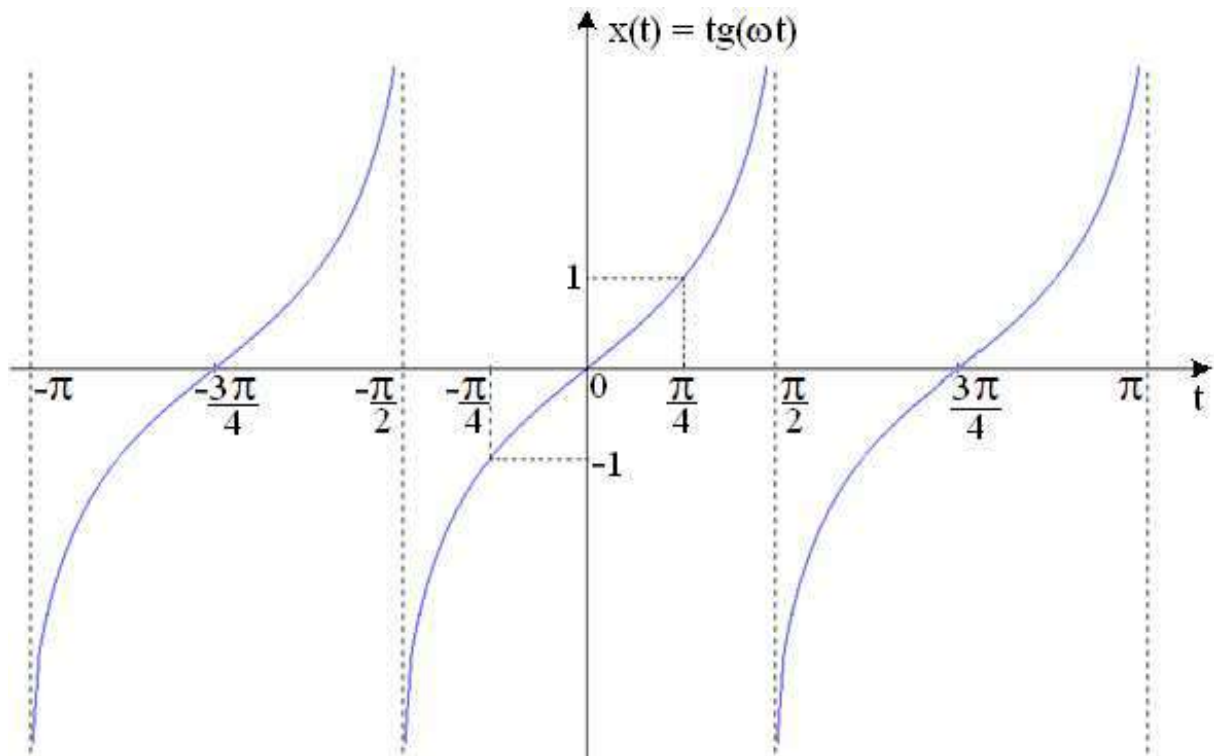


Fig. 1.9 – A função tangente, $x(t) = \text{tg}(\omega t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $\omega > 0$.

Assim como o seno e para o co-seno que se repetem a cada intervalo de 2π , a tangente se repete a cada intervalo de π . Logo,

$$\text{tg}(\theta) = \text{tg}(\theta + \pi) = \text{tg}(\theta - \pi).$$

ou melhor:

$$\text{tg}(\theta) = \text{tg}(\theta + k\pi), \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

1.7 – As inversas de seno, co-seno e tangente

Nitidamente as funções seno, co-seno e tangente não são inversíveis. Pelo gráfico de $x(t) = \text{sen}(\omega t)$, $x(t) = \text{cos}(\omega t)$ e $x(t) = \text{tg}(\omega t)$ vemos que se α e β forem valores no intervalo $[0, 1]$, e γ for um valor real qualquer, ou seja,

$$\alpha \in [-1, 1], \beta \in [-1, 1], \gamma \in (-\infty, \infty),$$

então vão haver muitos valores de $t \in (-\infty, \infty)$ para os quais

$$x(t) = \text{sen}(\omega t) = \alpha$$

$$x(t) = \text{cos}(\omega t) = \beta$$

$$x(t) = \text{tg}(\omega t) = \gamma$$

Portanto, para poder se achar a função inversa de seno, co-seno e tangente temos que limitar o intervalo destas funções.

No caso do *seno* limitamos ao intervalo $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, no caso *co-seno* limitamos ao intervalo $t \in [0, \pi]$, e no caso da *tangente* limitamos ao intervalo $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Os gráficos destas funções são apresentados nas figuras 1.10 e 1.11.

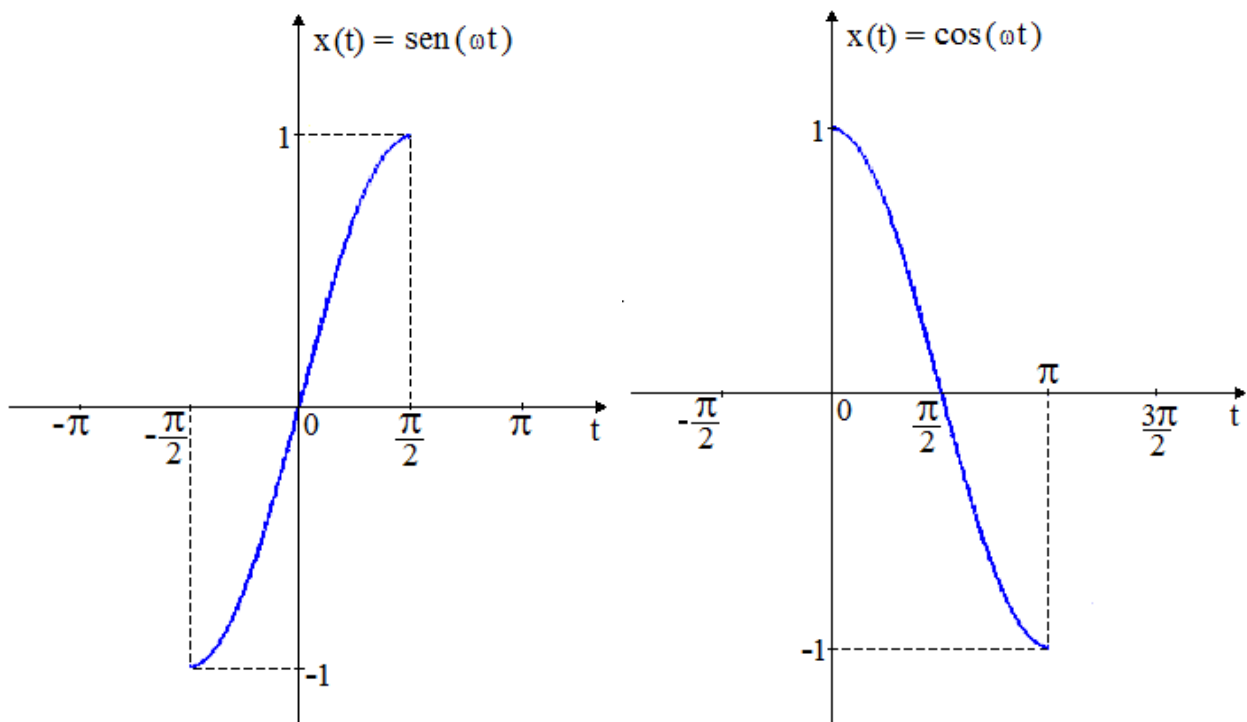


Fig. 1.10 – A função seno, $x(t) = \text{sen}(\omega t)$ limitada ao intervalo $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ (1° e 4° quadrantes), e $\omega > 0$ (à esquerda), e a função co-seno, $x(t) = \text{cos}(\omega t)$ limitada ao intervalo $t \in [0, \pi]$ (1° e 2° quadrantes), e $\omega > 0$ (à direita).

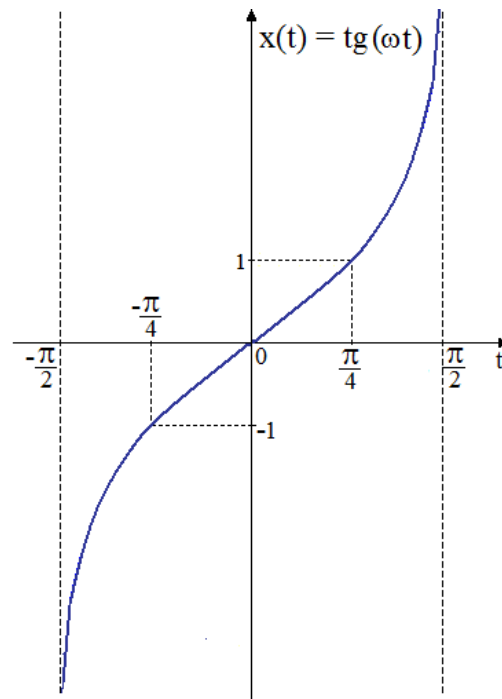


Fig. 1.11 – A função tangente, $x(t) = \text{tg}(\omega t)$ limitada ao intervalo $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ (1° e 4° quadrantes), e $\omega > 0$.

Esta é a norma geral adoptada pelas máquinas calculadoras e meios informáticos de cálculo modernos. Limita-se o arco a 2 quadrantes:

1° e 4° quadrante, no caso do seno ou da tangente;

e

1° e 2° quadrante, no caso do co-seno.

Desta forma é possível falar nas funções inversas do seno, do co-seno e da tangente:

$\arcsen(\alpha)$, $\arccos(\beta)$ e $\text{arctg}(\gamma)$.

Por exemplo, se $\gamma = 1$, o arco cuja a tangente é 1 é dado por

$$\text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

embora, como já foi visto acima, existam muitos outros arcos θ cuja tangente também é 1. Na verdade as soluções possíveis são:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

ou seja:

$$\theta = 45^\circ \quad \text{e} \quad \theta = 225^\circ$$

são 2 possíveis soluções de $\text{arctg}(\pi/4)$. E $\theta = 45^\circ$ está no primeiro quadrante e $\theta = 225^\circ$ está no terceiro quadrante.

No caso particular da inversa ser de uma fracção

$$\arcsen(b/a), \arccos(b/a) \text{ e } \arctg(b/a)$$

então podemos levar em consideração o quadrante do ponto (a, b) .

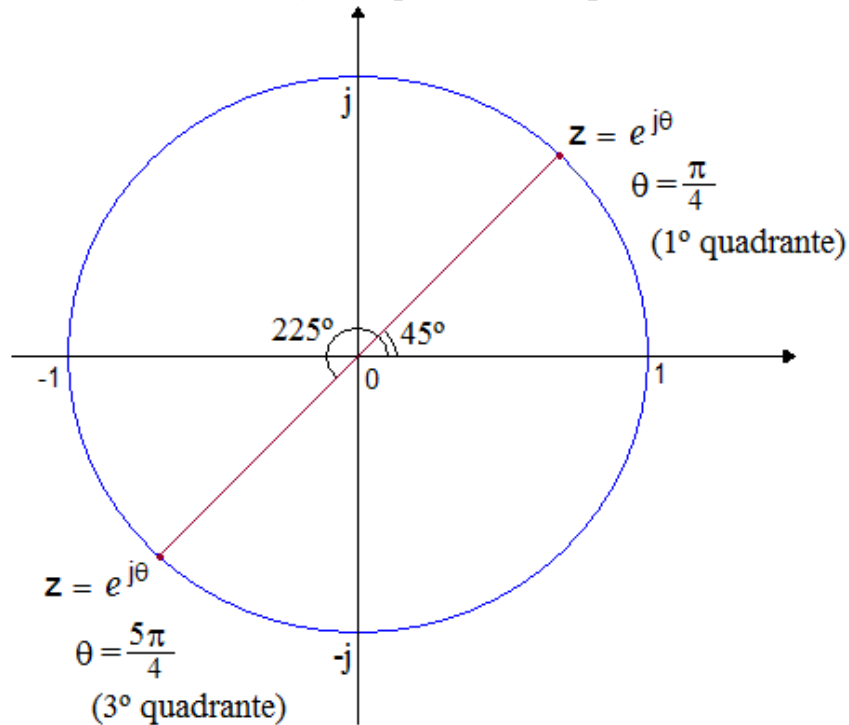


Fig. 1.12 – Dois arcos que têm a mesma tangente 1: 45° (ou $\pi/4$, 1º quadrante) e 225° (ou $5\pi/4$, 3º quadrante).

Desta forma a inversa do seno, do co-seno ou da tangente não fica limitada ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ ou $[0, \pi]$ que representam apenas 2 quadrantes, pois temos informação suficiente para determinar o arco nos 4 quadrantes. Por exemplo:

$$\arctg\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad (1^\circ \text{ quadrante})$$

$$\arctg\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{5\pi}{4} = 225^\circ = -135^\circ \quad (3^\circ \text{ quadrante})$$

$$\arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-\pi}{4} = -45^\circ = 315^\circ \quad (4^\circ \text{ quadrante})$$

$$\arctg\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ \quad (2^\circ \text{ quadrante})$$

1.8 – Exponenciais e logaritmos

O “*número neperiano e*” (devido ao matemático, astrólogo e teólogo escocês. *John Napier*, 1550-1617) vale aproximadamente

$$e = 2,7183$$

Mais precisamente, ele pode ser escrito como uma série infinita ou como um limite (esta última forma devido ao matemático suíço *Jakob Bernoulli*, 1654-1705):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

O “*número neperiano*” também é chamado de “*constante de Euler*” e é a base dos logaritmos naturais (ln). Portanto:

$$e^{\ln(x)} = x$$

Algumas relações básicas de exponenciais e logaritmos:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad (e^x)^y = e^{x \cdot y}$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \qquad \ln(x^a) = a \ln(x)$$

$$e^{-\ln(x)} = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}$$

Transformação da base *e* para a base 10:

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x)}{2,3} = 0,4343 \cdot \ln(x)$$

Transformação da base 10 para a base *e*:

$$\ln(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)} = \frac{\log_{10}(x)}{0,4343} = 2,3 \cdot \log_{10}(x)$$

Transformação de qualquer base “*b*” para a base “*a*”:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

1.9 – Derivadas

A teoria do cálculo diferencial é de autoria do físico e matemático inglês *Sir Isaac Newton* (1643-1727) e do filósofo e matemático alemão *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646-1716).

A notação das derivada de uma função $f(t)$ pode ser

$$\frac{df}{dt} \quad (\text{devido à } Newton)$$

ou

$$f'(t) \quad (\text{devido à } Leibniz).$$

A derivada de uma função $f(t)$ no instante t nos dá a *inclinação* (ou *declive*) de uma recta tangente à curva naquele instante.

Se $f(t)$ é crescente em $t = a$, então a derivada será positiva naquele instante

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=a} > 0.$$

Isso é ilustrado na figura 1.13.

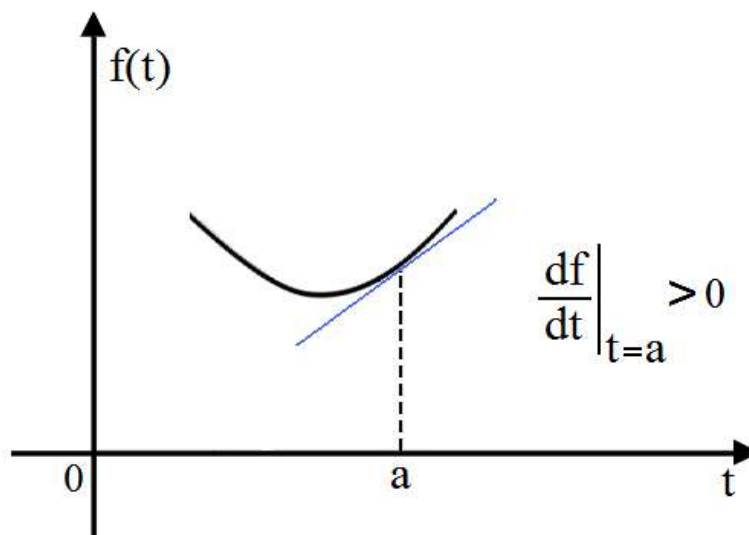


Fig. 1.13 – *Inclinação* positiva (ou *declive* positivo) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$.

Por outro lado, se $f(t)$ é decrescente em $t = a$, então a derivada será negativa naquele instante

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=a} < 0.$$

Isso é ilustrado na figura 1.14.

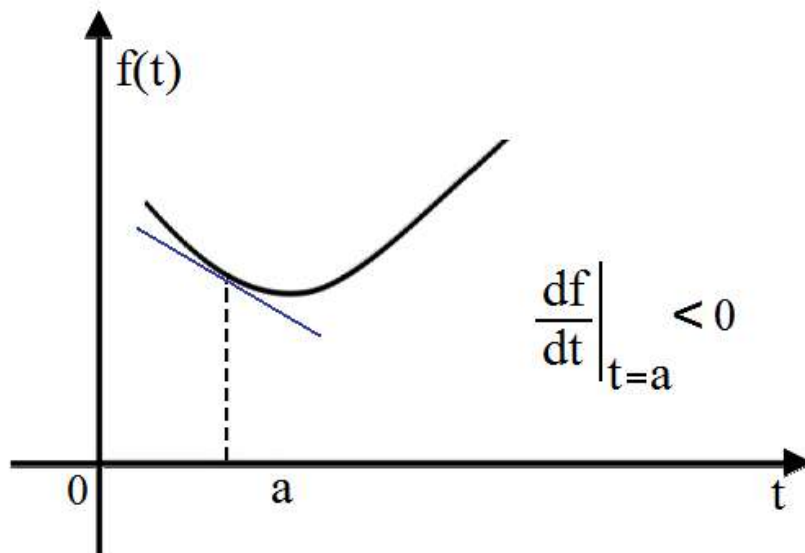


Fig. 1.14 – *Inclinação negativa (ou declive negativo) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$.*

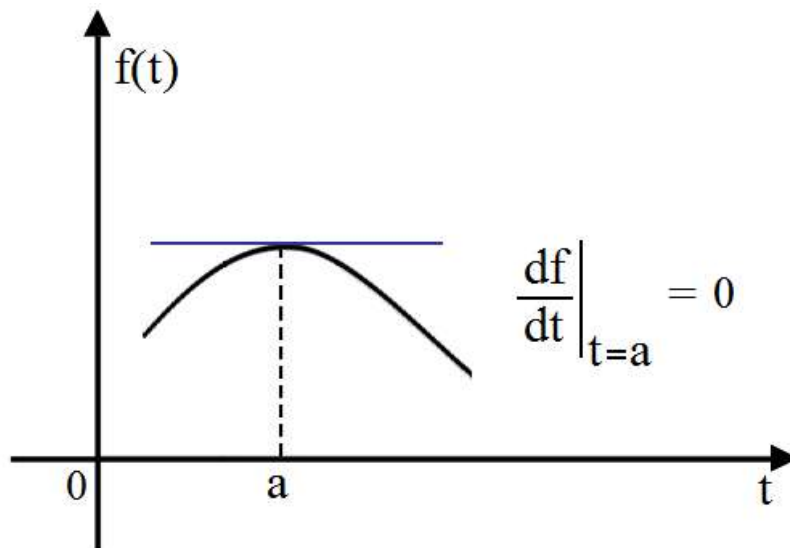


Fig. 1.15 – *Inclinação nula (ou declive nulo) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$. Caso de máximo local.*

Finalmente, se $f(t)$ não é crescente nem decrescente em $t = a$, então a derivada será zero naquele instante

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=a} = 0.$$

Neste caso pode-se ter um máximo ou um mínimo local, mas às vezes nenhum dos dois. Isso é ilustrado nas figuras 1.15, 1.16 e 1.17.

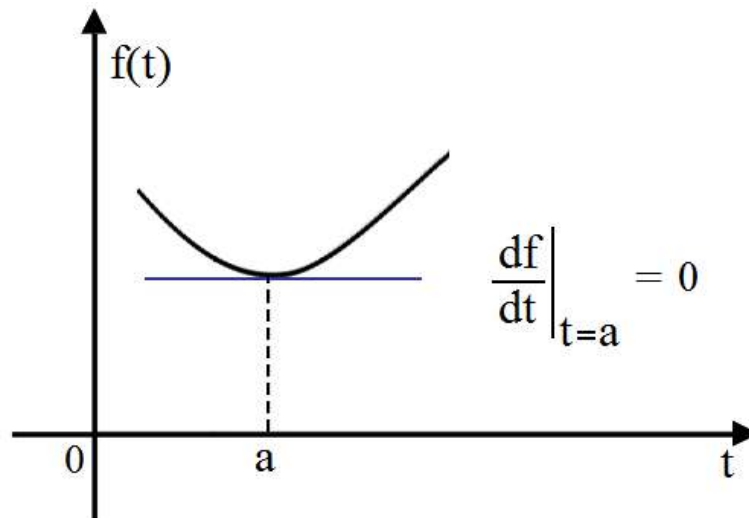


Fig. 1.16 – Inclinação nula (ou *declive* nulo) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$. Caso de mínimo local.

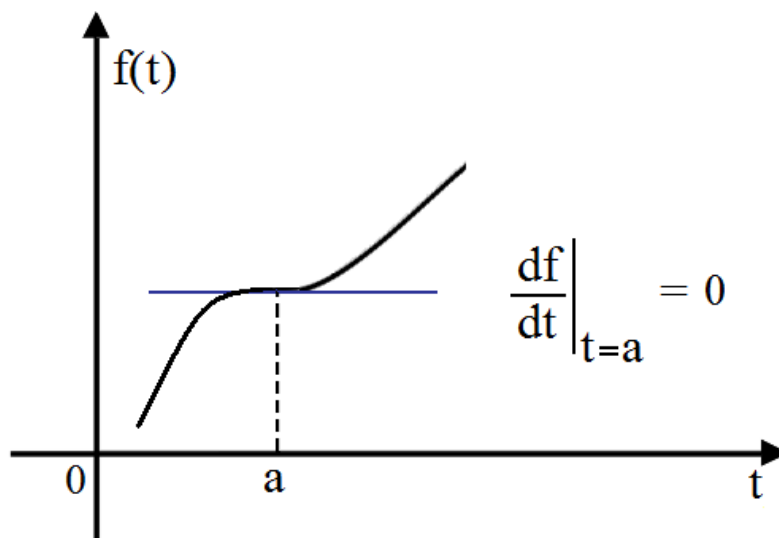


Fig. 1.17 – *Inclinação* nula (ou *declive* nulo) da recta tangente à curva $f(t)$ no instante $t = a$. Caso de ponto de inflexão, não é máximo nem mínimo local.

Algumas propriedades e regras das derivadas:

➤ Linearidade:

$$\frac{d(c \cdot f(t))}{dt} = c \cdot \frac{df(t)}{dt} = c \cdot f'(t) \quad (\text{homogeneidade})$$

$$\frac{d(f_1(t) + f_2(t))}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} + \frac{df_2(t)}{dt} = f_1'(t) + f_2'(t) \quad (\text{aditividade})$$

➤ Regra do produto:

$$\frac{d}{dt}(f(t) \cdot g(t)) = \frac{df(t)}{dt} \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{dg(t)}{dt} = f'(t) \cdot g(t) + g'(t) \cdot f(t)$$

➤ Regra do quociente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t) \cdot \frac{df(t)}{dt} - f(t) \cdot \frac{dg(t)}{dt}}{g^2(t)} = \frac{g(t) \cdot f'(t) - f(t) \cdot g'(t)}{g^2(t)}$$

➤ Regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = \frac{df}{dt}(g(t)) \cdot \frac{dg(t)}{dt} = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Se definirmos

$$u(t) = f(t) \quad \text{e} \quad v(t) = g(t)$$

então,

$$\frac{df}{dt} = u' \quad \text{e} \quad \frac{dg}{dt} = v'$$

E as regras acima podem ser reescritas de forma mais compacta como:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' \quad \text{(homogeneidade)}$$

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{(aditividade)}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{(regra do produto)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} \quad \text{(regra do quociente)}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{(regra da cadeia)}$$

➤ Algumas derivadas de funções simples:

$$\frac{d}{dt} c = 0$$

$$\frac{d}{dt} (t^n) = n \cdot t^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt} t = 1 \quad (\text{caso particular, } n = 1)$$

$$\frac{d}{dt} (c \cdot t) = c \quad (\text{aplicando a homogeneidade})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{d}{dt} (t^{-1}) = -t^{-2} = \frac{-1}{t^2} \quad (\text{caso particular, } n = -1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t^m} \right) = \frac{d}{dt} (t^{-m}) = -m \cdot t^{-m+1} = -m \cdot \frac{1}{t^{m+1}} \quad (\text{caso particular, } n = -m)$$

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{t}) = \frac{d}{dt} (t^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t \geq 0 \quad (\text{caso particular, } n = 1/2)$$

$$\frac{d}{dt} |t| = \frac{|t|}{t} = \text{sign}(t), \quad t \neq 0$$

➤ Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas:

$$\frac{d}{dt} c^t = c^t \cdot \ln c$$

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t \quad (\text{caso particular, } c = e, \text{ a única função que é igual a própria derivada})$$

$$\frac{d}{dt} \log_c t = \frac{1}{t \cdot \ln c}$$

$$\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t} = t^{-1}, \quad t > 0 \quad (\text{caso particular, } c = e)$$

$$\frac{d}{dt} \ln |t| = \frac{1}{t} = t^{-1}$$

$$\frac{d}{dt} \ln t^t = t^t \cdot (1 + \ln t)$$

Derivadas de funções trigonométricas:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sen}(t) = \cos(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cos}(t) = -\operatorname{sen}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg}(t) = \sec^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sec}(t) = \operatorname{tg}(t) \cdot \operatorname{sec}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cotg}(t) = -\operatorname{cossec}^2(t) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cossec}(t) = -\operatorname{cossec}(t) \cdot \operatorname{cotg}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsen}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccos}(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arctg}(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsec}(t) = \frac{1}{|t| \cdot \sqrt{t^2-1}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccot} g(t) = \frac{-1}{1+t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccossec}(t) = \frac{-1}{|t| \cdot \sqrt{t^2-1}}$$

➤ Derivadas de funções hiperbólicas:

$$\frac{d}{dt} \sinh(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \cosh(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tgh}(t) = \operatorname{sech}^2(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sech}(t) = -\operatorname{tgh}(t) \cdot \operatorname{sech}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cotgh}(t) = -\operatorname{cossech}^2(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{csch}(t) = -\operatorname{cotgh}(t) \cdot \operatorname{cossech}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsenh}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arccosh}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arctgh}(t) = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsech}(t) = \frac{-1}{t\sqrt{1 - t^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcoth}(t) = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arcsech}(t) = \frac{-1}{|t|\sqrt{1 + t^2}}$$

1.10 – Integrais

A integral indefinida de uma função $f(t)$ é representada como

$$\int f(\tau) \cdot d\tau$$

Por outro lado, a integral definida, representada como

$$\int_a^b f(\tau) \cdot d\tau, \quad \int_{-\infty}^b f(\tau) \cdot d\tau \quad \text{ou} \quad \int_a^{\infty} f(\tau) \cdot d\tau$$

faz a Soma de Riemann que calcula a área sob a curva em m intervalo bem definido como por exemplo:

$$[a , b], \quad] -\infty , b] \quad \text{ou} \quad [a , \infty [.$$

Este nome acima é dado em alusão ao matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

A integral é um processo inverso do da derivada de funções pois,

$$\int f'(t) dt = \int \frac{df}{dt}(t) dt = \int \frac{df(t)}{dt} dt = \int df = f(t) + C$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\int f(t) \cdot dt \right) = f(t).$$

Mais precisamente:

$$F(t) = \int_a^t f(t) \cdot dt$$

é chamada de primitiva de $f(t)$.

Este resultado é chamado de Teorema Fundamental do Cálculo e faz a interligação entre o Cálculo Diferencial (secção anterior) e o Cálculo Integral (desta secção).

Algumas regras de integração de funções em geral

$$\int a f(t) dt = a \cdot \int f(t) dt + C \quad (\text{regra da homogeneidade})$$

$$\int [f(t) + g(t)] dt = \int f(t) dt + \int g(t) dt + C \quad (\text{regra da aditividade})$$

$$\int [f'(t) \cdot g(t)] dt = f(t) \cdot g(t) + \int f(t) \cdot g'(t) dt \quad (\text{regra da integral por partes})$$

Se definirmos

$$u(t) = g(t) \quad \text{e} \quad v(t) = f(t)$$

então,

$$du = g'(t) \cdot dt \quad \text{e} \quad dv = f'(t) \cdot dt$$

e a regra da integral por partes pode ser escrita doutra forma:

$$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v du} \quad (\text{regra da integral por partes})$$

Por outro lado, se

$$u(t) = f(t) \quad \text{e} \quad du = f'(t) \cdot dt,$$

então a integral definida é calculada como:

$$\int_a^b du = u \Big|_a^b = u(b) - u(a)$$

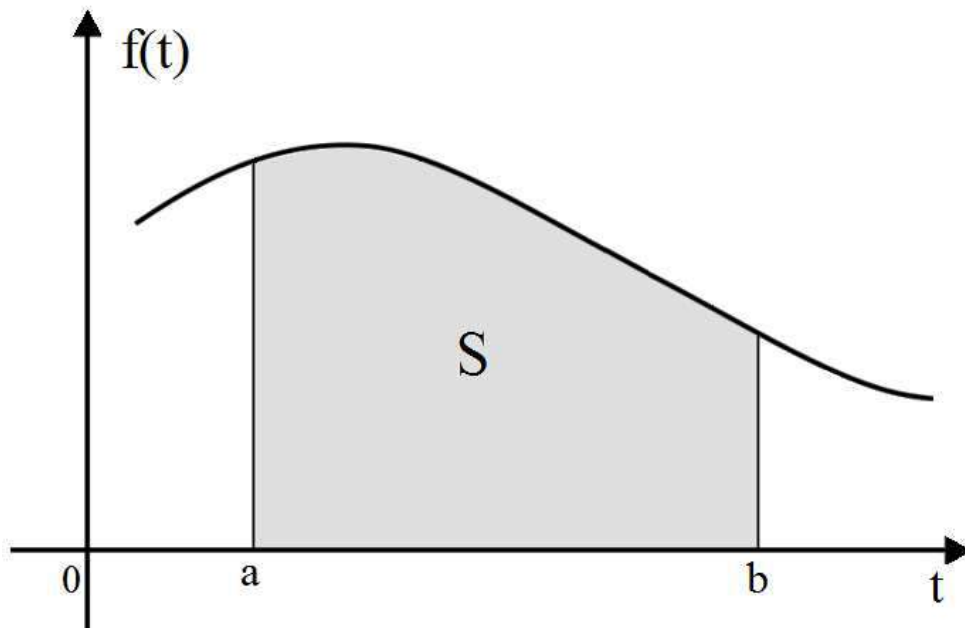


Fig. 1.18 – A área S sob a curva $f(t)$ no intervalo definido $[a, b]$.

A integral definida desde a até b da função f

$$\int_a^b f(\tau) \cdot d\tau = S$$

é a área S sob a curva, conforme ilustrado na figura 1.18.

A figura 1.19 mostra dois exemplos da integral definida desde a até b da função f, onde áreas abaixo do eixo das abcissas contam negativamente.

$$\int_a^b f_1(\tau) \cdot d\tau = S_1 - S_2$$

e

$$\int_a^b f_2(\tau) \cdot d\tau = S_1 - S_2 + S_3$$

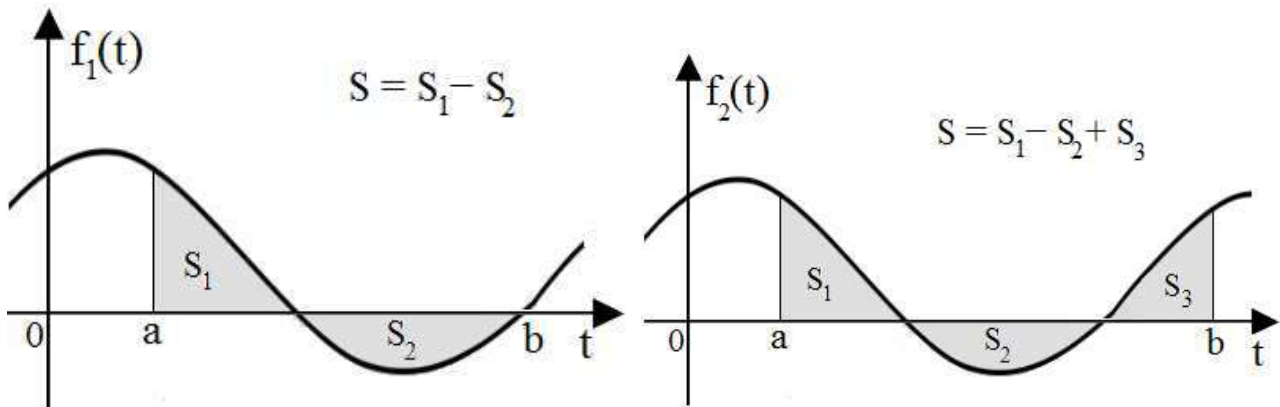


Fig. 1.19 – Dois exemplos da área sob a curva f(t) no intervalo definido [a, b]. As áreas abaixo do eixo das abcissas contam negativamente.

A figura 1.20 mostra dois exemplos da integral definida em intervalos infinitos como: $]-\infty, b]$, $[a, \infty[$.

$$\int_{-\infty}^b f_3(\tau) \cdot d\tau = S$$

e

$$\int_a^{\infty} f_4(\tau) \cdot d\tau = S$$

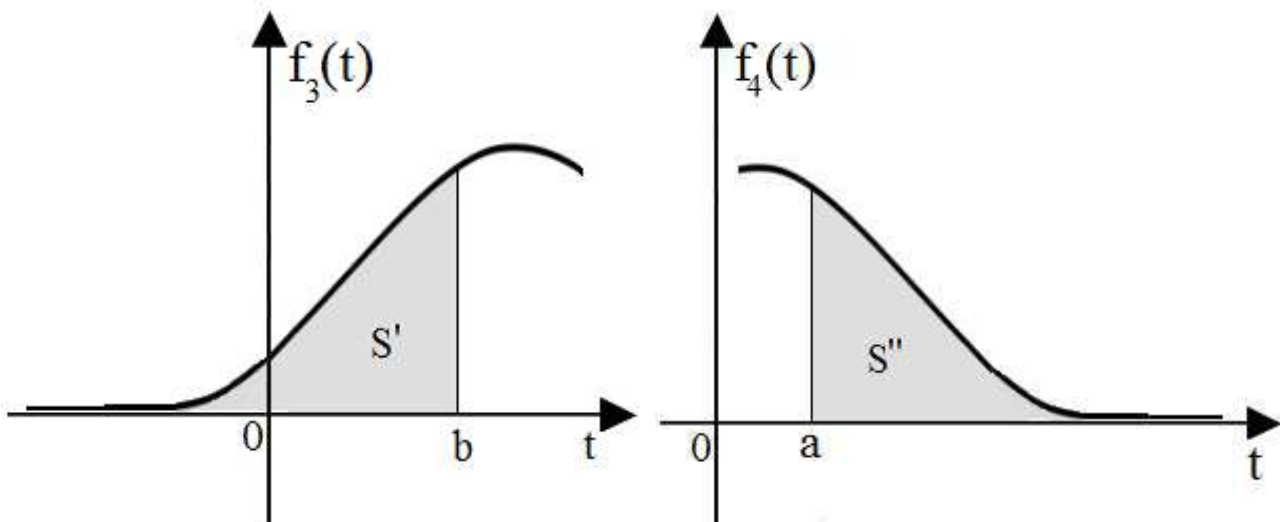


Fig. 1.20 – Dois exemplos da área sob a curva f(t) definidos em intervalos infinitos: $]-\infty, b]$ e $[a, \infty[$.

Apresentamos agora uma tabela das integrais das principais funções.

➤ Integrais de funções racionais:

$$\int du = u + C$$

$$\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int u^{-1} \cdot du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} \cdot dt = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C, \quad u^2 > a^2$$

➤ Integrais de funções irracionais:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u \cdot \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad u^2 < a^2$$

➤ Integrais de logaritmos:

$$\int \log_b(a \cdot t) dt = t \cdot \log_b(a \cdot t) - t \cdot \log_b e + C \quad (*)$$

$$\int \ln(a \cdot t) dt = t \cdot \ln(a \cdot t) - t + C$$

[caso particular $b = e$ da integral (*) acima]

$$\int t^n \cdot \ln(a \cdot t) dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(a \cdot t) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int t^{-1} \cdot \ln(a \cdot t) dt = \frac{1}{2} \cdot [\ln(a \cdot t)]^2 + C$$

$$\int \frac{dt}{t \cdot \ln(a \cdot t)} = \ln[\ln(a \cdot t)] + C$$

➤ **Integrais de funções exponenciais:**

$$\int a^u \cdot du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0 \quad (**)$$

$$\int e^u \cdot du = e^u + C \quad [\text{caso particular } \underline{a = e} \text{ da integral (**) acima}]$$

$$\int b^{at} dt = \frac{1}{a} \cdot \frac{b^{at}}{\ln(b)} + C \quad (***)$$

$$\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + C \quad [\text{caso particular } \underline{b = e} \text{ da integral (***) acima}]$$

$$\int t \cdot e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1) + C$$

$$\int t^n \cdot e^{at} dt = \frac{1}{a} t^n e^{at} - \frac{n}{a} \int t^{n-1} e^{at} dt$$

$$\int t^n \cdot b^{at} dt = \frac{t^n b^{at}}{a \cdot \ln(b)} - \frac{n}{a \cdot \ln(b)} \int t^{n-1} b^{at} dt, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

$$\int e^{at} \cdot \text{sen}(bt) dt = \frac{e^{at}}{(a^2 + b^2)} [a \cdot \text{sen}(bt) - b \cdot \text{cos}(bt)] + C$$

$$\int e^{at} \cdot \text{cos}(bt) dt = \frac{e^{at}}{(a^2 + b^2)} [a \cdot \text{cos}(bt) + b \cdot \text{sen}(bt)] + C$$

➤ **Integrais de funções trigonométricas:**

$$\int \text{sen}(u) du = -\text{cos}(u) + C$$

$$\int \text{cos}(u) du = \text{sen}(u) + C$$

$$\int \text{tg}(u) du = \ln|\text{sec}(u)| + C$$

$$\int \text{cotg}(u) du = \ln|\text{sen}(u)| + C$$

$$\int \text{sec}(u) \cdot du = \int \frac{1}{\text{cos}(u)} \cdot du = \ln|\text{sec}(u) + \text{tg}(u)| + C$$

$$\int \operatorname{cosec}(u) \cdot du = \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)} \cdot du = \ln|\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)| + C$$

$$\int \sec(u) \cdot \operatorname{tg}(u) \cdot du = \int \frac{\operatorname{tg}(u)}{\operatorname{sen}(u)} \cdot du = \sec(u) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}(u) \cdot \operatorname{cotg}(u) \cdot du = \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u) \cdot \operatorname{tg}(u)} \cdot du = -\operatorname{cosec}(u) + C$$

$$\int \sec^2(u) \cdot du = \int \frac{1}{\cos^2(u)} \cdot du = \operatorname{tg}(u) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(u) \cdot du = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(u)} \cdot du = -\operatorname{cotg}(u) + C$$

$$\int \operatorname{sen}(at) dt = \frac{-1}{a} \cos(at) + C$$

$$\int \cos(at) dt = \frac{1}{a} \operatorname{sen}(at) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2(at) dt = \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2at)}{4a} + C$$

$$\int \cos^2(at) dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2at)}{4a} + C$$

➡ Fórmula de recorrência para integrais de potências de funções trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}^n(a \cdot u) du = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1}(a \cdot u) \cdot \cos(a \cdot u)}{n \cdot a} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}(a \cdot u) du$$

$$\int \cos^n(a \cdot u) du = \frac{\cos^{n-1}(a \cdot u) \cdot \operatorname{sen}(a \cdot u)}{n \cdot a} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2}(a \cdot u) du$$

$$\int \operatorname{tg}^n(a \cdot u) du = \frac{\operatorname{tg}^{n-1}(a \cdot u)}{a \cdot (n-1)} - \int \operatorname{tg}^{n-2}(a \cdot u) du$$

$$\int \operatorname{cotg}^n(a \cdot u) du = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1}(a \cdot u)}{a \cdot (n-1)} - \int \operatorname{cotg}^{n-2}(a \cdot u) du$$

$$\int \sec^n(a \cdot u) du = \frac{\sec^{n-2}(a \cdot u) \cdot \operatorname{tg}(a \cdot u)}{a \cdot (n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \cdot \int \sec^{n-2}(a \cdot u) du$$

$$\int \operatorname{cosec}^n(a \cdot u) du = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2}(a \cdot u) \cdot \operatorname{cotg}(a \cdot u)}{a \cdot (n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \cdot \int \operatorname{cosec}^{n-2}(a \cdot u) du$$

➤ **Integrais de outras funções trigonométricas:**

$$\int \operatorname{sen}(a \cdot t) \cdot \cos(b \cdot t) dt = -\frac{\cos[(a+b)t]}{2(a+b)} - \frac{\cos[(a-b)t]}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen}(a \cdot t) \cdot \operatorname{sen}(b \cdot t) dt = \frac{\operatorname{sen}[(a-b)t]}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}[(a+b)t]}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos(a \cdot t) \cdot \cos(b \cdot t) dt = \frac{\operatorname{sen}[(a-b)t]}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}[(a+b)t]}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen}(a \cdot t) \cdot \cos(a \cdot t) dt = -\frac{\cos(2 \cdot a \cdot t)}{4 \cdot a} + C$$

$$\int \operatorname{tg}(a \cdot t) dt = \int \frac{\operatorname{sen}(a \cdot t)}{\cos(a \cdot t)} dt = -\frac{1}{a} \cdot \ln|\cos(a \cdot t)| + C$$

$$\int \operatorname{cotg}(a \cdot t) dt = \int \frac{\cos(a \cdot t)}{\operatorname{sen}(a \cdot t)} dt = \frac{1}{a} \cdot \ln|\operatorname{sen}(a \cdot t)| + C$$

$$\int t \cdot \operatorname{sen}(a \cdot t) dt = -\frac{1}{a^2} \operatorname{sen}(a \cdot t) - \frac{t}{a} \cos(a \cdot t) + C$$

$$\int t \cdot \cos(a \cdot t) dt = \frac{1}{a^2} \cos(a \cdot t) + \frac{t}{a} \operatorname{sen}(a \cdot t) + C$$

$$\int t^n \cdot \operatorname{sen}(a \cdot t) dt = -\frac{t^n}{a} \cos(a \cdot t) + \frac{n}{a} \int t^{n-1} \cos(a \cdot t) dt$$

$$\int t^n \cdot \cos(a \cdot t) dt = \frac{t^n}{a} \operatorname{sen}(a \cdot t) - \frac{n}{a} \int t^{n-1} \operatorname{sen}(a \cdot t) dt$$

➤ **Integrais de funções hiperbólicas:**

$$\int \operatorname{senh}(at) dt = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{cosh}(at) + C$$

$$\int \operatorname{cosh}(at) dt = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{senh}(at) + C$$

$$\int \operatorname{senh}^2(at) dt = \frac{\operatorname{senh}(2at)}{4a} - \frac{t}{2} + C$$

$$\int \operatorname{cosh}^2(at) dt = \frac{\operatorname{senh}(2at)}{4a} + \frac{t}{2} + C$$

$$\int t \cdot \operatorname{senh}(at) dt = \frac{t}{a} \cdot \operatorname{cosh}(at) - \frac{1}{a^2} \cdot \operatorname{senh}(at) + C$$

$$\int t \cdot \cosh(at) dt = \frac{t}{a} \cdot \sinh(at) - \frac{1}{a^2} \cdot \cosh(at) + C$$

$$\int t^n \cdot \sinh(at) dt = \frac{t^n}{a} \cdot \cosh(at) - \frac{n}{a} \cdot \int t^{n-1} \cdot \cosh(at) dt + C$$

$$\int t^n \cdot \cosh(at) dt = \frac{t^n}{a} \cdot \sinh(at) - \frac{n}{a} \cdot \int t^{n-1} \cdot \sinh(at) dt + C$$

$$\int \tanh(at) dt = \int \frac{\sinh(at)}{\cosh(at)} dt = \frac{1}{a} \cdot \ln[\cosh(at)] + C$$

$$\int \coth(at) dt = \int \frac{\cosh(at)}{\sinh(at)} dt = \frac{1}{a} \cdot \ln|\sinh(at)| + C$$

➡ Integrais definidas:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t} \cdot dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} \cdot dt = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} \cdot dt = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t} \cdot dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} t^{n-1} \cdot e^{-t} dt = \Gamma(n) = (n-1)! \quad [\text{função gama}]$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(t) \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \cdot dt = \begin{cases} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{se } n \text{ é inteiro par } \geq 2 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-1)} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{se } n \text{ é inteiro ímpar } \geq 3 \end{cases}$$

1.11 – Decibéis (dB)

A unidade **Bell** (B) tem este nome em alusão ao escocês *Alexander Graham Bell* (1847-1922). O **deciBel** (dB) é um submúltiplo do **Bell** que corresponde a um décimo do **Bell**. Entretanto, o **deciBel** tornou-se uma unidade de uso muito mais comum que o **Bell**.

O **deciBel** (dB) é usado para uma grande variedade de medições, especialmente em acústica (intensidade de sons), mas também como medida de ganho ou intensidade relativa na física (para a *pressão* p) e na electrónica (para a *tensão eléctrica* v , para a *corrente eléctrica* i , ou para a *potência* P).

O decibel (dB) é uma unidade de medida adimensional assim como as medidas de ângulo: o radiano (rad) e o grau ($^\circ$), ou a percentagem (%).

O decibel é portanto uma unidade de intensidade ou potência relativa (uma medida da razão entre duas quantidades, sendo uma de referência).

A definição do dB é obtida com o uso do logaritmo da seguinte forma: x em decibéis usualmente é definido como:

$$x \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(x)$$

que é a expressão que vamos utilizar neste texto, mas às vezes x em decibéis também pode ser definido como:

$$x \Big|_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10}(x)$$

Como o **deciBell** é uma medida relativa de ganho relativo (em relação a um valor de referência) somente são calculados os decibéis de valores positivos. Não faz sentido calcular os decibéis de um valor negativo.

É fácil de se verificar que, $1 \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$, logo

$$1 \Big|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

Valores maiores que 1 se tornarão positivos ao serem transformados em dB. Eles representam um ganho de facto. Por outro lado, valores menores que 1 (i.e., valores entre 0 e 1) se tornarão negativos ao serem transformados em dB. Eles representam uma atenuação.

Outro detalhe:

$$x \Big|_{\text{dB}} = - \frac{1}{x} \Big|_{\text{dB}}$$

Note que:

$$\text{se } x > 1 \quad \implies \quad x \Big|_{\text{dB}} > 0 \text{ dB}$$

$$\text{se } x = 1 \quad \implies \quad x \Big|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

$$\text{se } 0 < x < 1 \quad \implies \quad x \Big|_{\text{dB}} < 0 \text{ dB}$$

$$\text{se } x < 0 \quad \implies \quad \text{n\~{o} existe } x \Big|_{\text{dB}}$$

Isso esta ilustrado na figura 1.21.

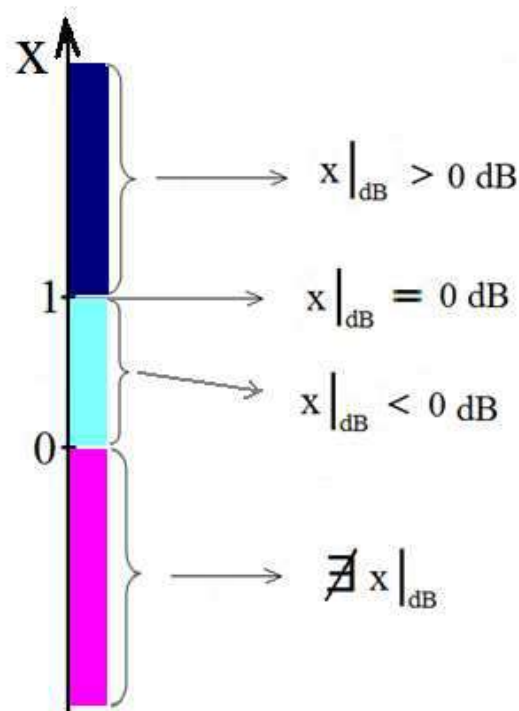


Fig. 1.21 – o valor de x em dB.

Alguns exemplos:

$$10 \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(10) = 20 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{10} \Big|_{\text{dB}} = 0,1 \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(10^{-1}) = (-1) \cdot 20 \cdot \log_{10}(10) = -20 \text{ dB}$$

$$100 \Big|_{\text{dB}} = 10^2 \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(10^2) = 40 \text{ dB}$$

$$1000 \Big|_{\text{dB}} = 10^3 \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(10^3) = 60 \text{ dB}$$

$$2 \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(2) = 20 \cdot (0,3) = 6 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{2} \Big|_{\text{dB}} = 0,5 \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = 20 \cdot \log_{10}(2^{-1}) = (-1) \cdot 20 \cdot (0,3) = -6 \text{ dB}$$

$$\sqrt{2} \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(\sqrt{2}) = 20 \cdot \log_{10}(2^{1/2}) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 20 \cdot (0,3) = 3 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Big|_{\text{dB}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 20 \cdot \log_{10}(2^{-1/2}) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 20 \cdot (0,3) = -3 \text{ dB}$$

$$200 \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(2 \cdot 100) = 20 \cdot \{\log_{10}(100) + \log_{10}(2)\} = 20 \cdot (2 + 0,3) = 46 \text{ dB}$$

$$0,2 \Big|_{\text{dB}} = \frac{2}{10} \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{2}{10}\right) = 20 \cdot \{\log_{10}(2) + \log_{10}(10)\} = 20 \cdot (0,3 - 1) = -14 \text{ dB}$$

$$50 \Big|_{\text{dB}} = \frac{100}{2} \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{100}{2}\right) = 20 \cdot \{\log_{10}(100) - \log_{10}(2)\} = 20 \cdot (2 - 0,3) = 34 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{50} \Big|_{\text{dB}} = \frac{2}{100} \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{2}{100}\right) = 20 \cdot \{\log_{10}(2) - \log_{10}(100)\} = 20 \cdot (0,3 - 2) = -34 \text{ dB}$$

Resumindo os exemplos acima:

$$10 \Big|_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$$

$$0,1 \Big|_{\text{dB}} = -20 \text{ dB}$$

$$100 \Big|_{\text{dB}} = 40 \text{ dB}$$

$$1000 \Big|_{\text{dB}} = 60 \text{ dB}$$

$$2 \Big|_{\text{dB}} = 6 \text{ dB}$$

$$0,5 \Big|_{\text{dB}} = -6 \text{ dB}$$

$$\sqrt{2} \Big|_{\text{dB}} = 3 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Big|_{\text{dB}} = -3 \text{ dB}$$

$$200 \Big|_{\text{dB}} = 46 \text{ dB}$$

$$0,2 \Big|_{\text{dB}} = -14 \text{ dB}$$

$$50 \Big|_{\text{dB}} = 34 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{50} \Big|_{\text{dB}} = -34 \text{ dB}$$